

Matematica Finanziaria – II esonero 2009

Domanda n°2

Un portafoglio è composto da uno ZCB triennale che ha un prezzo $P = 100 \cdot e^{-0,05} \cdot 0,98$ e rimborsa 100 e da un'opzione call di scadenza triennale. Sapendo che l'azione sottostante alla call quota oggi 5, che lo strike price è 4,2 ed ipotizzando che $u = 1,10$, $d = 0,88$ e $i = 0,05$ valutare:

- il prezzo dell'opzione considerata;
- i TIR del portafoglio descritto corrispondenti ai possibili percorsi aleatori.

Risoluzione.

Determiniamo i valori a scadenza ($T = 3$) del sottostante:

$$A_{uuu} = A \cdot u^3 = 6,6550$$

$$A_{uud} = A \cdot u^2 \cdot d = 5,3240$$

$$A_{udd} = A \cdot u \cdot d^2 = 4,2592$$

$$A_{ddd} = A \cdot d^3 = 3,4074$$

I pay off a scadenza della call valgono rispettivamente:

$$C_{uuu} = \max(A_{uuu} - K; 0) = 2,4550$$

$$C_{uud} = \max(A_{uud} - K; 0) = 1,1240$$

$$C_{udd} = \max(A_{udd} - K; 0) = 0,0592$$

$$C_{ddd} = \max(A_{ddd} - K; 0) = 0$$

mentre la probabilità risk neutral vale:

$$\pi = \frac{1 + i - d}{u - d} = 0,7727 \rightarrow 77,27\%$$

Possiamo ora calcolare il prezzo dell'opzione call:

$$C = \frac{\pi^3 \cdot C_{uuu} + 3\pi^2 \cdot (1 - \pi) \cdot C_{uud} + 3\pi \cdot (1 - \pi)^2 \cdot C_{udd} + (1 - \pi)^3 \cdot C_{ddd}}{(1 + i)^3} = 1,3799$$

Osserviamo che nella formula per il calcolo del prezzo dell'opzione, il coefficiente 3 rappresenta il numero di traiettorie che collegano il nodo di partenza al nodo

corrispondente a due rialzi ed un ribasso (e viceversa due ribassi ed un rialzo). Nel modello CRR, la dinamica del sottostante può essere visualizzata attraverso un albero binomiale.

Il valore del portafoglio all'epoca *zero* si ottiene sommando al prezzo dello ZCB ($P = 100 \cdot e^{-0,05} \cdot 0,98 = 93,2205$) il prezzo dell'opzione:

$$V_0 = P + C = 94,6004$$

Il valore all'epoca *tre* del portafoglio si ottiene sommando al valore di rimborso dello ZCB il valore dell'opzione (ossia il suo pay off), nei quattro percorsi aleatori possibili:

$$V_3(uuu) = 100 + C_{uuu} = 102,4550$$

$$V_3(uud) = 100 + C_{uud} = 101,1240$$

$$V_3(udd) = 100 + C_{udd} = 100,0592$$

$$V_3(ddd) = 100 + C_{ddd} = 100$$

Il TIR del portafoglio si ottiene risolvendo la seguente equazione:

$$V_0 \cdot (1 + TIR)^3 = V_3 \Rightarrow TIR = \sqrt[3]{\frac{V_3}{V_0}} - 1$$

Avremo perciò nei quattro percorsi aleatori possibili:

$$TIR(uuu) = 2,6944\%$$

$$TIR(uud) = 2,2477\%$$

$$TIR(udd) = 1,8876\%$$

$$TIR(ddd) = 1,8675\%$$